Classes de conjugaison tordues des groupes de lacets et G-fibrés sur courbes elliptiques*

FU Lie, ROUSSEL Tristan

21 décembre 2009

Table des matières

Remerciements

Nous remercions chaleureusement pour leur aide précieuse les personnes suivantes : D. Hernandez, O. Debarre, J.-P. Demailly, H. Skoda et F. Paulin.

1 Introduction

Le but de ce mémoire est le théorème de Looijenga [Gin] suivant :

Théorème 1.1 *Soit $q \in \mathbb{C}^*$ avec $|q| < 1$. Notons $\mathcal{E}$ la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Soit G un groupe de Lie complexe connexe. Alors il y a une bijection entre $k_G(\mathcal{E})$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de G-fibrés principaux holomorphes sur $\mathcal{E}$, et l'ensemble des classes de conjugaison tordues de paramètre q dans $G(\mathbb{C}^*)_{hol}$.*

*sous la direction de David Hernandez.

Pour cela on s'intéressera d'abord à la notion de fibré qui est centrale ici, ensuite on définira la notion de groupe de lacets qui est l'autre notion importante.

On rappelle la définition d'un groupe de Lie :

Définition 1.2 (variété de dimension infinie [Miln2]) *Soit V un espace vectoriel topologique localement convexe separé (evtlcs). On dit qu'un espace topologique regulier M est une variété (de classe $\mathcal{C}^\infty$) modelée sur V, s'il y a une famille d'homéomorphismes $\phi_i : V_i \to M_i$, où V_i sont des ouverts d'espace de modèle V, et $\{M_i\}_i$ est un recouvrement d'ouverts de M, tels que, pour tout $M_i \cap M_j \neq \varnothing$, le changement de coordonnées $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Définition 1.3 (Groupe de Lie de dimension infinie [Miln2]) *On dit qu'un groupe G est un groupe de Lie, si et seulement si il est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ modelée sur un evtlcs, telle que la loi et l'inverse sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Remarque 1.4 *De même que pour la dimension finie, TG est aussi un groupe de Lie, la loi $p_* : TG \times TG \to TG$ est induite par $p : G \times G \to G$.*
De plus, il y a une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel $\mathcal{G} = T_1 G$.
$\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie de dimension infinie tel que le crochet est continu.

2 Généralités sur les Fibrés

Définition 2.1 (cadre des variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$) *Un* fibré *est un épimorphisme $p : E \to B$ entre deux variétés, de sorte qu'il existe une variété F, et pour tout b dans B, il existe un voisinage ouvert U de b, et un difféomorphisme ϕ_U, tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[rr, "\phi_U"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

On dit que B est la base, *E l'*espace total, *$p^{-1}(b)$ la* fibre *au-dessus de b, F le* type de fibre, *U un* voisinage distingué *de b, ϕ une* trivialisation locale *en b.*
De plus, si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert distingué de B, on définit pour tout $b \in B$,

$$\phi_{i,x} := \phi_{U_i}(x, \cdot) : F \to p^{-1}(b)$$

et on pose

$$\begin{aligned} g_{ij} : \quad U_i \cap U_j \quad &\to \mathrm{Diff}(F) \\ x \qquad &\mapsto \phi_{i,x}^{-1} \circ \phi_{j,x} \end{aligned}$$

On appelle $\{g_{ij}\}$ les fonctions de transition *(associées à $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$).*
Un morphisme $s : B \to E$ satisfaisant $p \circ s = id_B$ est appelé une section *du fibré E. L'ensemble des sections de E est noté $\Gamma(B, E)$.*

On dit qu'un fibré est trivial si et seulement si il existe une trivialisation globale :

$$\begin{tikzcd} B \times F \arrow[rr, "\phi", "\simeq"'] \arrow[dr, "pr_1"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Remarques 2.2

1. Ici, on a posé la condition *localement triviale* dans la définition de fibré. Dans d'autres textes, on peut l'appeler *fibré localement trivial.*
2. La définition précédente s'étend de manière analogue aux cadres continu, holomorphe et algébrique. (On remplace *variété* par *espace topologique, variété complexe, variété algébrique*, et remplace *difféomorphisme* par *homéomorphisme, difféomorphisme holomorphe, isomorphisme* respectivement). Dans ce mémoire, on considérera tout les cas.
3. La famille des fonctions de transition est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou dans l'autre cadres, continue, holomorphe, regulière) et satisfait la condition de 1-cocycle : $\forall i, j, k \in I$
$$g_{ik}g_{kj}g_{ji} = id_F \tag{1}$$
En particulier, $\forall i, j \in I$, on a $g_{ii} = id_F$ et $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$.
4. Si les fonctions de transition g_{ij} sont à valeurs dans un sous-groupe G de $\mathrm{Diff}(F)$ $(\mathrm{Homeo}(F), \mathrm{Diff}_{hol}(F), \mathrm{Aut}(F))$, alors on dit que G un *groupe structural* de ce fibré, et on dit que c'est un G-fibré.

- **ATTENTION :** La notion *de groupe structural d'un fibré* n'est biendéfinie que si on a choisi une famille de trivialisations locales qui appartient à un groupe G.

5. (**Réduction du groupe structural**) Pour un fibré $p : E \to B$ de groupe structural G, si on peut trouver un nouveau recouvrement et des nouvelles trivialisations locales, tels que les fonctions de transition sont à valeurs dans un sous-groupe H de G, alors on dit qu'on peut *réduire* le groupe structural de G à H.
6. Bien sûr, si F est un G-espace à gauche, cette action ne s'étend pas en général à une action de G sur E sauf si G est abélien, ou plus généralement, si on peut réduire le groupe structural dans le centre de G.
Par ailleurs, si G agit sur F à droite aussi, alors l'action s'étend naturellement sur E.

On a besoin d'une autre caractérisation pour faire des calculs et des constructions explicites : (on ne la donne que dans le cadre des variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$, c.f. les remarques précédentes)

Proposition 2.3 (Une autre définition équivalente de fibré) *Soient B,F deux variétés, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ recouvrement ouvert de B, G un sous-groupe de Lie* *de* Diff(F) *(ou plus généralement, un homomorphisme* $\rho : G \to \mathrm{Diff}(F)$*, i.e.* G *opère de façon* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* F *par difféomorphismes). Si on se donne une famille de fonctions de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *:*

$$\{g_{ij} : U_i \cap U_j \to G\}_{i,j\in I}$$

satisfaisant la condition de cocycle (1), alors

1. *Il existe un fibré* $p : E \to B$ *dont* B *est la base,* F *est le type de fibre,* $p^{-1}(U_i)$ *est trivial* ($\forall i \in I$)*, et* G *est un groupe structural de* E*, tel que* $\{g_{ij} \in I\}_{i,j\in I}$ *est la famille de fonctions de transition associée à* $\mathcal{U}$*.*
2. *On a une autre caractérisation des sections : une famille de morphismes* $\{s_i : U_i \to F\}_{i\in I}$ *satisfaisant* les formules de trasition *suivantes est une section :* $\forall i, j \in I$

$$s_j = g_{ji} \circ s_i \qquad \textit{sur } U_i \cap U_j$$

Preuve. (l'équivalence des deux définitions)
C'est une preuve constructive.
On pose $E = \bigsqcup_{i\in I}(U_i \times F)/\sim$ comme espace topologique, où la relation équivalente est définie comme suit :
pour tous $x_1 \in U_i, x_2 \in U_j, y_1, y_2 \in F$, on dit $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$
si et seulement si $x_1 = x_2 \in U_i \cap U_j$, et $g_{ij}(x_1) \bullet y_1 = y_2$ (On a noté ici $\bullet$ pour l'action de G sur Diff(F)).
Par construction, il y a une projection naturelle

$$\begin{array}{rcl} p: & E & \to B \\ & (x, y) \in U_i \times F & \mapsto x \end{array}$$

Il est facile de voir que c'est un fibré vérifiant les conditions. La preuve du deuxième point est facile :

$$\begin{aligned} & g_{ji} \circ s_i \\ = \; & \phi_j^{-1} \circ \phi_i \circ s_i \\ = \; & s_j \end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.4 (Quelques constructions catégoriques) *On se donne une variété (de classe* $\mathcal{C}^\infty$*)* F*, et un groupe de Lie* G *qui agit de façon* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* F *par difféomorphismes (i.e.* G *est un sous-groupe de Lie de* Diff(F)*),* la catégorie des fibrés de type de fibre F et de groupe structure G *est caractérisé comme suit :*

1. (objets) *Les fibrés de type de fibre* F *et de groupe structural* G*, comme construits dans la proposition 2.3*

2. (morphismes) *Soient* $p_1 : E_1 \to B_1$ *et* $p_2 : E_2 \to B_2$ *deux objets, on appelle un* morphisme *de* E_1 *dans* E_2 *un diagramme commutatif comme ci-dessous (préservation des fibres) :*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\overline{f}"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

qui verifie la condition de compatibilité avec le groupe de structure *:* $\forall x_1 \in B_1, x_2 = \overline{f}(x_1) \in B_2$*, il existe des voisinages ditingués* U_1 *de* x_1*,* U_2 *de* x_2*, et des trivialisations locales* $\phi_{U_i} : F \times U_i \to p^{-1}(U_i), i = 1, 2$ *tels que* $\phi_{U_1,x_1} \circ f \circ \phi_{U_2,x_2}^{-1} : F \to F$ *est dans le groupe* G*.*
Comme d'habitude, on peut définir la notion d'isomorphisme.

3. (fibré induit) *Soient* $p : E \to B$ *un objet,* $f : B^{'} \to B$ *un morphisme entre les deux variétés, on note le produit fibré* $f^*E = B^{'} \times_B E = \{(x, y) \in B^{'} \times E | f(x) = p(y)\}$*, et il y a une projection naturelle* $p' : f^*E \to B^{'}$ *qui donne une structure de fibré, et un morphisme naturel* $\widetilde{f}$ *dans* E *qui est un morphisme de fibrés :*

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p^{'}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B^{'} \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

On appelle f^*E *le fibré induit de* E *par* f*.*

4. (produit)*Soient* $p_1 : E_1 \to B_1$ *et* $p_2 : E_2 \to B_2$ *deux objets, on appelle leur fibré produit le fibré naturel* $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$

5. (La catégorie des fibrés sur un même espace) *Pour une certaine variété donnée, notée* B*, on considère souvent la catégorie des fibrés sur* B*. Les morphismes sont définis comme 2. exactement sauf* $B_1 = B_2 = B$*.*

6. (produit sur un même espace) *Soient* $p_1 : E_1 \to B$ *et* $p_2 : E_2 \to B$ *deux fibrés sur* B*, on définit leur produit le fibré induit de* $E_1 \times E_2$ *par le morphisme diagonal*

$$\begin{aligned} \Delta : \quad B &\to B \times B \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

Remarque 2.5

1. L'opération d'induction de fibré est contravariante, c'est-à-dire, si on a un fibré $p : E \to B$ et $B^{''} \xrightarrow{f^{'}} B^{'} \xrightarrow{f} B$, alors

$$f^{'*} \circ f^*E \cong (f \circ f')^*E$$

En particulier, si $A \subset B$ est un ouvert, alors $f^*(E|_A) \cong (f^*E)|_{f^{-1}(A)}$

2. (à propos des $4^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$ points des définitions précédentes) : La catégorie des fibrés de type de fibre F et de groupe structure G (sur un espace donné ou pas) n'est pas stable par produit. En effet, le groupe structural de produit est $G \times G$ et le type de fibre de produit est $F \times F$.

Proposition 2.6 *En utilisant la définition équivalente de fibré dans la Propostion 2.3, on peut donner une nouvelle interprétation des définitions précédentes. Soient B,F deux variétés, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ recouvrement ouvert de B et G un sous-groupe de Lie de* $\mathrm{Diff}(F)$*. On se restreint au cas sur une même base, le cas général est analogue.*

1. (objets) *Les familles de fonctions de transition $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \to G\}_{i,j\in I}$ qui vérifient la condition de cocycle (1)*

2. (morphismes) *Soient $\{g_{ij}\}$ et $\{g'_{ij}\}$ deux fibrés sur B de groupe structural G et de type de fibre F, un morphisme est une famille de fonctions $\{f_i : U_i \to G\}_{i\in I}$ satisfaisant les formules de transition :*

$$g'_{ji} f_i = f_j g_{ji} \qquad \forall i, j \tag{2}$$

3. (isomorphisme)*Deux fibrés $\{g_{ij}\}$ et $\{g'_{ij}\}$ sont isomorphes si et seulement si il existe un morphisme entre eux.*
Plus précisement, si et seulement si ils sont égaux à l'action d'une 0-cochaîne *près, i.e. il existe une famille de morphismes $\{f_i : U_i \to G\}_{i\in I}$ satisfaisant :*

$$g'_{ji} f_i = f_j g_{ji} \qquad \forall i, j \tag{3}$$

En particulier, un fibré $\{g_{ij}\}$ est trivial si et seulement si il est un 1-cobord :

$$\exists \{\lambda_i : U_i \to G\}_{i\in I}, \qquad g_{ij} = \lambda_i^{-1} \lambda_j \qquad \forall i, j \tag{4}$$

4. (fibré induit) (cas général) *Si E est un fibré de type de fibre F, et de groupe structural G sur B, $\{g_{ij}\}$ sont les fonctions de transition associés à un recouvrement distingué $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, $f : B' \to B$ un morphisme de variétés. On pose $\mathcal{V} = \{V_i = f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ et $g'_{ij} = g_{ij} \circ f : V_i \cap V_j \to G$, alors $\{g'_{ij}\}$ sont les fonctions de transition du fibré induit f^*E associé au recouvrement $\mathcal{V}$.*

Preuve. Comme on a déja vu 1 dans Proposition 2.3, et 3 découle de 2 facilement, et 4 est exactement la reformulation des définition. Il reste à verifier (2). Pour 3, on note $\{\phi_i\}_{i\in I}$,$\{\phi'_i\}_{i\in I}$ les trivialisations locales sur $\{U_i\}_{i\in I}$ de E et E' respectivement. Si le morphisme de fibré est $f : E \to E'$, alors,

$$f_i = \phi_i'^{-1} \circ f \circ \phi_i \qquad (\forall i \in I)$$

Donc

$$\begin{aligned}
& g'_{ji} \circ f_i \\
= \;& \phi_j'^{-1} \circ \phi_i' \circ f_i \\
= \;& \phi_j'^{-1} \circ f \circ \phi_i \\
= \;& \phi_j'^{-1} \circ f \circ \phi_j \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_i \\
= \;& f_j \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_i \\
= \;& f_j \circ g_{ji}
\end{aligned}$$

En identifiant les difféomorphismes de F avec les éléments de G, on obtient le résultat. □

Remarque 2.7 D'après la deuxième caractérisation des fibrés et des isomorphisme entre eux, on peut reformuler le problème de classification des fibrés comme suit : On note $\mathscr{G}$ le faisceau de morphismes dont le but est G.

Définition 2.8 *On appelle ici faisceau $\mathscr{X}$ sur l'espace topologique X (ou dont le but est X) la donnée pour chaque ouvert U de G d'un ensemble $\mathscr{X}(U)$ et pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$ d'une application $\rho_{V,U} : \mathscr{X}(U) \to \mathscr{X}(V)$ tels que si on a une inclusion d'ouverts $W \subset V \subset U$ alors $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$, et si on a une réunion d'ouverts $U = \bigcup_i U_i$ telle qu'on ait une famille $\{s_i\}_i$ qui vérifie $\forall i, s_i \in \mathscr{X}(U_i)$ et si $\forall i, j, U_i \cap U_j \neq \{\emptyset\}$ et $s_i \circ \rho_{U_i \cap U_j, U_i} = s_j \circ \rho_{U_i \cap U_j, U_j}$ alors il existe $s \in \mathscr{X}(U)$ tel que $\forall i, s \circ \rho_{U_i,U} = s_i$. ρ est une opération de restriction et la derniére condition énonce qu'on peut recoller les fonctions entre elles.*

1. Pour un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_{ij}\}$ fixé, on note $Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ l'ensemble des 1-cocycles (1), et $C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ le groupe des 0-cochaînes (3). $C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ agit sur $Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ par la formule (3). On pose
$$H^1(\mathcal{U}, \mathscr{G}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{G})/C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$$
l'ensemble des orbites. Il s'appelle *la première cohomologie de Čech associée à $\mathcal{U}$.*
2. Si $\mathcal{V}$ est un recouvrement plus fin que $\mathcal{U}$, fixons une application de raffinement. Alors on a l'application naturelle de restriction :
$$Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \to Z^1(\mathcal{V}, \mathscr{G})$$
respectant l'action de $C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ sur $Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ et sa restriction $C^0(\mathcal{V}, \mathscr{G})$ sur $Z^1(\mathcal{V}, \mathscr{G})$. Par passage au quotient, on a l'application naturelle
$$H^1(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathscr{G})$$
De plus, on peut vérifier que cette application est indépendante de l'application de raffinement.

3. Enfin, on définit
$$H^1(X,\mathscr{G}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U},\mathscr{G})$$
Par les arguments et caractérisation précédentes et la localité de la notion de *fibré*, il y a une bijection naturelle entre $H^1(X,\mathscr{G})$ et l'ensemble de classes d'isomorphismes de fibrés sur X de groupe structural G.

Exemple 2.9

- (*fibré vectoriel*) Si $F = V$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, G est un groupe de Lie, $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation (de classe $\mathcal{C}^\infty$), alors la catégorie de fibrés de type de fibre F et de groupe structural G est juste la catégorie de fibré vectoriel .
De même, si $F = V$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, G un groupe de Lie complexe, $\rho : G \to GL(V)$ une représentation (holomorphe), alors la catégorie de fibrés holomorphes de type de fibre F et de groupe structural G est juste la catégorie de fibré vectoriel holomorphe de rang $\dim V$.

- (*revêtement*) Soit B un espace topologique connexe par arcs, localement simplement connexe, F un ensemble discret. Si $\pi_1(B)$ agit sur F, alors la catégorie de fibrés de type de fibre F et de groupe de structure $\pi_1(B)$ est juste la catégorie des revêtements de B de fibre F.

- (*fibré de Hopf*) Si $\mathcal{S}^3$ est la sphère unité de $\mathbb{C}^2$, il y a une projection naturelle
$$\begin{array}{rccl} p : & \mathcal{S}^3 & \to & \mathcal{S}^2 = \mathbb{C}P^1 \\ & (z_1, z_2) & \mapsto & [z_1 : z_2] \end{array}$$
En effet, c'est un fibré de type de fibre $\mathcal{S}^1$, noté :
$$\mathcal{S}^1 \hookrightarrow \mathcal{S}^3 \to \mathcal{S}^2$$
De même, en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, on a les fibrés suivants :
$$\mathcal{S}^3 \hookrightarrow \mathcal{S}^7 \to \mathcal{S}^4$$
$$\mathcal{S}^7 \hookrightarrow \mathcal{S}^{15} \to \mathcal{S}^8$$

- *(fibré principal)* C'est le fibré plus fondamental. Dans la construction ci-dessus, si le type de fibre $F \simeq G$ comme G-espace (à gauche), on l'appelle un fibré principal :

Définition 2.10 (fibré principal) *Un fibré $p : P \to X$ de type de fibre F et de groupe structural G est dit un* fibré G-principal*, si $F \simeq G$ comme G-espace (à gauche).*
On appelle G le groupe structural de P.

Remarque 2.11

1. Un fibré G-principal admet une action naturelle de G à droite (héritée de l'action de translation à droite de G, c.f. Remarque 2.2). De plus, les fibres de P sont stables par l'action de G à droite.
2. D'après la caractérisation dans la Proposition 2.6, un fibré est trivial si et seulement si son fibré principal associé est trivial. Plus généralement, deux fibrés de type de fibre F et de groupe structural G sont isomorphes si et seulement si leur fibrés principaux associés sont isomorphes, i.e. le type de fibre ne joue aucun rôle dans la classification de fibré.
3. Il découle aussi de la Proposition 2.6 qu'un fibré principal est trivial si et seulement si il admet une section globale.

Pour vérifier si une projection est un fibré principal ou pas, on a besoin d'une autre caractérisation des fibrés principaux :

Proposition 2.12 (*Caractérisation des fibrés principaux :*) *Soit G un groupe de Lie qui agit sur une variété P librement à droite. Si l'espace des orbites X admet une structure de variété, telle que la projection canonique $\pi : P \to X$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie la condition de localement triviale : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x, et un isomorphisme local ϕ_U comme G-espace, tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} U \times G \arrow[rr, "\phi_U"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Alors $\pi : P \to X$ est un fibré G-principal.

Preuve. La preuve est presque évidente. $\square$

Remarque 2.13 Pour les autres cadres (continu, holomorphe, algébrique), on remplace dans la propostion pécédente *groupe de Lie* par *groupe topologique*, *groupe de Lie complexe*, *groupe algébrique*, et *de classe $\mathcal{C}^\infty$* par *continue*, *holomorphe*, *régulière*, et *variété* par *espace topologique*, *variété complexe*, *variété algébrique*.

Proposition 2.14 (*espace homogène*) *Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G (donc un sous-groupe de Lie par le théorème de Henri Cartan), alors $\pi : G \to G/H$ est un fibré H-principal, noté*

$$H \hookrightarrow G \to G/H$$

Par ailleurs, si G agit transitivement sur une variété X, pour un point $x \in X$, on note le stabilisateur $H = Stab_G(x)$ qui est un sous-groupe fermé de G, alors $X \simeq G/H$ comme G-espace , i.e. on a un fibré H-principal :

$$\begin{aligned} H \hookrightarrow \quad G &\to X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

PREUVE. Par Proposition 2.12, il reste à verifier la condition de localement trivial. Il est standard de construire une section locale de $G \to G/H$, par l'homogénéité de G/H, on sait qu'il est localement trivial, donc $G \to G/H$ est un fibré H-principal d'après la Proposition 2.12. $\square$

Exemple 2.15

- En appliquant la Propostion 2.14 au cas particulier de $O(n), U(n)$ agit sur la variété de Stiefel et la variété de Grassmann, on a les fibrés principaux suivants :

$$\begin{aligned} O(n-k) &\hookrightarrow O(n) \to V_k(\mathbb{R}^n) \\ O(k) \times O(n-k) &\hookrightarrow O(n) \to G_k(\mathbb{R}^n) \\ U(n-k) &\hookrightarrow U(n) \to V_k(\mathbb{C}^n) \\ U(k) \times U(n-k) &\hookrightarrow U(n) \to G_k(\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

  Donc on peut identifier :

$$V_k(\mathbb{R}^n) \simeq O(n)/O(n-k) \qquad G_k(\mathbb{R}^n) \simeq O(n)/(O(k) \times O(n-k))$$

$$V_k(\mathbb{C}^n) \simeq U(n)/U(n-k) \qquad G_k(\mathbb{C}^n) \simeq U(n)/(U(k) \times U(n-k))$$

Plus généralement, on a le résultat concernant les espaces homogènes :

Proposition 2.16 *Soit G un groupe de Lie, H est un sous-groupe fermé de G, L est un sous-groupe fermé de H, alors la projection canonique*

$$\pi : G/L \to G/H$$

est un fibré de type de fibre H/L, et de groupe structural H/L_0, où $L_0 = \bigcap_{h \in H} hLh^{-1}$ est le plus grand sous goupe de H qui est invariant par les conjugaisons dans H.

PREUVE. Voir [Ste] Thm 8.15, P 42 $\square$

Exemple 2.17 *En combinant l'Exemple 2.15 et la Proposition 2.16, on a les fibrés principaux :*

$$O(k) \hookrightarrow V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$$

$$U(k) \hookrightarrow V_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$$

De même, on a les fibrés (non-principaux) de group structural $O(n-l), U(n-l)$: pour tout $1 \leq l < k \leq n$

$$V_{k-l}(\mathbb{R}^{n-l}) \hookrightarrow V_k(\mathbb{R}^n) \to V_l(\mathbb{R}^n)$$

$$V_{k-l}(\mathbb{C}^{n-l}) \hookrightarrow V_k(\mathbb{C}^n) \to V_l(\mathbb{C}^n)$$

Définition 2.18 (fibré associé) *Soit $\pi : P \to X$ un fibré G-principal, F est un G-espace à gauche, i.e. une représentation $\rho : G \to \mathrm{Aut}(F)$, alors on peut construire un fibré $p : E \to X$ de type de fibre F et de groupe structural G comme suit :*
On pose $\mathcal{E} = P \times F$ muni de l'action de G diagonale :

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ (g, y, f) &\mapsto g \cdot (y, f) = (y \cdot g^{-1}, g \cdot f) \end{aligned}$$

où $g \in G, y \in P, f \in F$ et l'action de G sur P à droite est naturelle, c.f. Remarque 2.11.
On note E l'espace des orbites $\mathcal{E}/G$, qui admet une projection p sur X induite par π. Il est facile de voir que $p : E \to X$ est un fibré de type de fibre F et de groupe structural G.
On l'appelle le fibré associé au fibré G-principal P et à la representation ρ, *ou plus simplement* le fibré E associé à P et à ρ, *noté $E = P \times_\rho F$ ou $P \times_G F$*

Remarque 2.19 Si G agit sur F aussi à droite, alors de même que dans la Remarque 2.2 (6), le fibré E associé à P et ρ admet une action naturelle de G à droite :

$$\begin{aligned} G \times E &\to E \\ (g, [y, f]) &\mapsto [y, f \cdot g] \end{aligned}$$

où [y,f] désigne la classe d'équivalence de $(y, f) \in \mathcal{E}$ par l'action diagonale de G, et on peut vérifier facilement qu'elle bien définie (car $[y \cdot g_1^{-1}, g_1 \cdot f \cdot g_2] = [y, f \cdot g_2]$).
Par exemple, si F=G avec l'action de G à gauche et à droite par translations, le fibré associé à P et F est canonqiuement isomorphe à P sur lequel G agit à droite. c.f. Remarque 2.11

Exemple 2.20 (fibré de système de coordonnées et fibré tangent) Si M est une variété, $V = \mathbb{R}^n$ muni de l'action canonique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ à gauche et à droite, on définit pour $m \in M$ l'ensemble des bases de la fibre au-dessus de m notée P_m, et $P = \bigsqcup_{m \in M} P_m$ fibré $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-principal alors le fibré associé $P \times_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ est juste le fibré tangent de M, et d'après la remarque précédente, $TM = P \times_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ admet une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ à droite.

3 Théorie d'Homotopie de Fibrés, Classification des Fibrés Topologiques

Dans toute cette section, $\mathcal{I}$ désigne l'intervalle $[0, 1]$, $\mathcal{D}^n$ la boule unité de dimension n et $\mathcal{S}^n$ la sphère unité de dimension n ($\mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

Définition 3.1 (fibration) *Un épimorphisme $p : E \to B$ entre deux espaces topologiques est dit une* fibration *si et seulement si il satisfait la propriété* *de relèvement des homotopies* (HLP[1]) *: pour tout espace topologique Y tel que $h \circ i_0 = p \circ f$ comme dans le diagramme suivant, il existe $\widetilde{h}$ de sorte que le diagramme commute :*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times \mathcal{I} \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & B \end{tikzcd}$$

Remarque

La définition précédente est dûe à Hurewicz, donc on l'appelle souvent *fibration de Hurewicz*. Il y a une notion plus générale. Dans la définition de fibration de Hurewicz on prend tout les espaces topologiques Y comme espaces tests, mais dans la définition suivante, on prend seulement les cubes.

Définition 3.2 (fibration de Serre) *Un épimorphisme $p : E \to B$ entre deux espaces topologiques est dit une* fibration de Serre*, si et seulement si il satisfie la propriété de relèvement des homotopies* (HLP) *pour les cubes : pour tout n entier et $h \circ i_0 = p \circ f$ comme le diagramme suivant, il existe $\widetilde{h}$ de sorte que le diagramme commute encore :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{I}^n \times \mathcal{I} \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & B \end{tikzcd}$$

Proposition 3.3 *La condition de fibration de Serre est beaucoup plus forte qu'il n'y paraît : Si $p : E \to B$ est une fibration de Serre, alors elle vérifie HLP pour tous les CW complexes aussi.*

Pour démontrer cette proposition, on introduit une notion plus générale d'abord :

Définition 3.4 (ELP) *$A \hookrightarrow X$ est une inclusion d'espaces topologiques, on dit que le couple (X,A) satisfait la propriété de extension-relèvement(**ELP**[2]) par rapport à $p : E \to B$ si et seulement si pour tout $h \circ i = p \circ f$ comme le diagramme suivant, il existe $\widetilde{h}$ de sorte que le diagramme commute encore :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & B \end{tikzcd}$$

Lemme 3.5

1. *$p : E \to B$ est une fibration (de Hurewicz)*
   $\Longleftrightarrow$ Pour tout Y espace topologique, le couple ($Y \times \mathcal{I}$, Y) satisfait ELP par rapport à $p : E \to B$.

---

[1]HLP=homotopy lifting property
[2]ELP=extension lifting property

2. $\quad p : E \to B$ *est une fibration de Serre*
$\Longleftrightarrow$ *Pout tout n entier, le couple* $(\mathcal{I}^n \times \mathcal{I},\, \mathcal{I}^n)$ *satisfait ELP par rapport à* $p : E \to B$,
$\Longleftrightarrow$ *Pour tout n entier, le couple* $(\mathcal{D}^n \times \mathcal{I}, \mathcal{D}^n \times \{0\} \cup \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{I})$ *satisfait ELP par rapport à* $p : E \to B$

Preuve du Lemme. 1 et la première équivalence de 2 sont juste des reformulations des définitions. Il reste à montrer la deuxième équivalence de 2. Mais il découle de l'observation que les deux couples $(\mathcal{I}^n \times \mathcal{I},\, \mathcal{I}^n)$ et $(\mathcal{D}^n \times \mathcal{I}, \mathcal{D}^n \times \{0\} \cup \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{I})$ sont homéomorphes comme couples d'espaces [3]. □

Preuve de la Proposition. $\mathcal{I}^n$ est bien-sûr un CW complexe, donc il suffit de montrer l'autre sens.
Soit $p : E \to B$ une fibration de Serre, Y un CW complexe fini, on va démontrer HLP par récurrence sur dim(Y).
Si $\dim(Y) = 0$, HLP est évident. On admet le résultat en $\dim(Y) \leq n$.
Si $\dim(Y) = n+1$, on note Z le n-squelette de Y. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $h' : Y \times 0 \cup Z \times \mathcal{I} \to E$. Or $Y = Z \cup_{\phi_i} \mathcal{D}_i^{n+1}$, où $\mathcal{D}_i^{n+1}$ sont des (n+1)-cellules de Y, ϕ_i sont des morphismes caractéristiques, donc par le Lemme 3.5, on peut prolonger $h'|_{\mathcal{S}_i^n \times \mathcal{I}} : \mathcal{S}_i^n \times \mathcal{I} \to E$ à $\widetilde{h}|_{\mathcal{D}_i^n \times \mathcal{I}} : \mathcal{D}_i^n \times \mathcal{I} \to E$. Donc il existe $\widetilde{h} : Y \times \mathcal{I} \to E$ qui vérifie $\widetilde{h} \circ i = p \circ f$. Donc par principe de récurrence, le résultat est vrai pour Y CW complexe fini.
Si Y est infini, on se ramène au cas fini par l'argument standard de compacité.
□

La notion de fibration est une généralisation de fibré :

Théorème 3.6

1. *Tout fibré* $p : E \to B$ *est une fibration de Serre.*
2. *Si de plus* B *est un espace topologique paracompact, alors le fibré* $p : E \to B$ *est une fibration (de Hurewicz)*

Preuve. c.f. [Hatch] P379. □

Comme une application du théorème précédent, on montre le résultat suivant concernant les fibrés sur un espace de la forme $B \times \mathcal{I}$.

Proposition 3.7 *Tout fibré* $p : E \to B \times \mathcal{I}$ *est isomorphe à* $p' \times id : E' \times \mathcal{I} \to B \times \mathcal{I}$ *pour certain fibré* $p' : E \to B$.

[3] On appelle couple d'espaces topologiques la donnée (X, A) où $A \subset X$. Deux couples d'espaces $(X, A), (Y, B)$ sont dits homéomorphes s'il existe une bijection bicontinue $f : X \to Y$ telle que $f(A) = B$.

Preuve. On note $i_0 : B \hookrightarrow B \times \mathcal{I}$ l'inclusion $x \mapsto (x, 0)$, et pose :

$$E' = i_0^* E = E|_{B \times \{0\}}$$

alors $p' : E' \to B$ est un fibré sur B.
Il reste à verifier que $p' \times id : E' \times \mathcal{I} \to B \times \mathcal{I}$ est isomorphe à $p : E \to B \times \mathcal{I}$
D'après la Propostion 2.6 3, il suffit de constuire un morphisme entre eux.
Mais la propriété de fibration de $p : E \to B \times \mathcal{I}$ résout ce problème comme le diagramme suivant le montre :

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E' \times \mathcal{I} \arrow[r, "p' \times id"'] \arrow[ur, dotted, "f"] & B \times \mathcal{I} \end{tikzcd}$$

□

Corollaire 3.8 *Soit $p : E \to B$ un fibré, et $f_0, f_1 : B' \to B$ deux morphismes de B' dans B. Si f_0 et f_1 sont homotopes, alors $f_0^* E \simeq f_1^* E$.*

Preuve. (méthode 1)
Soit $F : B' \times \mathcal{I} \to B$ l'homotopie entre f_0, f_1, i.e. $f_0 = F \circ i_0$, $f_1 = F \circ i_1$, où i_0, i_1 sont les inclusions de B' dans $B' \times \mathcal{I}$. Comme

$$f_0^* E = i_0^* \circ F^*(E), \;\; f_1^* E = i_1^* \circ F^*(E)$$

On peut supposer que $B = B' \times \mathcal{I}$, i.e. $p : E \to B' \times \mathcal{I}$, on va montrer que $E_0 = i_0^* E = E|_{B' \times \{0\}}$ est isomorphe à $E_1 = i_1^* E = E|_{B' \times \{1\}}$ comme fibré sur B.
D'après la proposition précédente, $E_0 \times \mathcal{I} \simeq E_1 \times \mathcal{I} \simeq E$ comme fibrés sur $B' \times \mathcal{I}$, donc $E_0 \simeq E_1$ □

On a une démonstration directe du corollaire ci-dessus comme suit :

Preuve du Corollaire. (méthode 2)
Comme dans la méthode 1 ci-dessus, on peut supposer que $B = B' \times \mathcal{I}$, i.e. $p : E \to B' \times \mathcal{I}$, on va montrer que $E_0 = i_0^* E = E|_{B' \times \{0\}}$ est isomorphe à $E_1 = i_1^* E = E|_{B' \times \{1\}}$ comme fibré sur B'.
On suppose d'abord B est connexe. Alors par trivialité locale, on a pour tout $t \in \mathcal{I}$, il existe un voisinage (intervalle ouvert) U_t de t dans $\mathcal{I}$, tel que $E_s = i_s^* E = E|_{B' \times \{s\}}$ sont isomorphes entre eux pour tout $s \in U_t$.
Donc par compacité de $\mathcal{I}$, $i_0 * E \simeq i_1 * E$.
On obtient le cas général en raisonnant composante par composante. □

Corollaire 3.9 *Soient B, B' deux espaces topologiques qui sont homotopiquement équivalents, alors il y a une bijection entre les ensembles de classes d'isomorphismes de fibrés de type de fibre F sur eux.*

On a le théorème standard très utile pour calculer les groupes d'homotopie :

Théorème 3.10 (suite exacte longue) *Soit $p : E \to B$ est une fibration de Serre. On choisit des points de base $b_0 \in B$ et $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Alors le morphisme*

$$p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$$

est un isomorphisme pour tout $n \geq 1$. Si de plus B est connexe par arcs, il y a une suite exacte longue :

$$\cdots \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \cdots \to \pi_0(F, x_0) \to \pi_0(E) \to \{*\}$$

Preuve. c.f. [Hatch] P375 □

Remarques 3.11

1. Comme la notion de fibration de Serre est plus générale que la fibration (de Hurewicz), le théorème est bien vrai pour une fibration de Hurewicz.
2. La suite exacte longue ci-dessus et la suite exacte longue de groupe d'homotopie associé au couple (E, F) sont naturellement égaux à isomorphisme près au sens suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n(F,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & \pi_n(E,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & \pi_n(E,F,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"] & \pi_{n-1}(F,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & \cdots \arrow[r] & \pi_0(E,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & \{*\} \\
\cdots \arrow[r] & \pi_n(F,x_0) \arrow[r] & \pi_n(E,x_0) \arrow[r] & \pi_n(B,b_0) \arrow[r] & \pi_{n-1}(F,x_0) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \pi_0(E,x_0) \arrow[r] & \{*\}
\end{tikzcd}$$

Corollaire 3.12 *Si $p : E \to B$ est un fibré de type de fibre F, alors on a une suite exacte longue :*

$$\cdots \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \cdots \to \pi_0(F, x_0) \to \pi_0(E) \to \{*\}$$

On veut classifier les fibrés G-principaux sur une base B au sens topologique. C'est-à-dire, on s'intéresse au problème suivant :

Problème (Classification des fibrés principaux topologiques)

Soit X un espace topologique, G un groupe topologique, comment classifier tous les fibrés G-principaux topologiques sur X à isomorphisme près ? Pour commencer, on introduit la notion clé d'*espace classifiant*.

Définition 3.13 (espace classifiant) *Soit G un groupe topologique, un fibré G-principal $p : EG \to BG$ est dit un* fibré universel *si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout fibré G-principal P sur X, il existe un morphisme f de X dans BG, tel que P est isomorphe au fibré induit de $p : EG \to BG$ par f.*
2. *Soient f_0, f_1 deux morphismes de X dans BG. Si $f_0^* EG \simeq f_1^* EG$ comme fibrés sur X, alors f_0 et f_1 sont homotopes.*

On appelle BG un espace classifiant.

Remarques 3.14

1. La réciproque de $2^{\text{ème}}$ point dans la définition précédente est automatiquement vraie par le Corollaire 3.8.
2. En utilisant le langage catégorique, la Définition 3.13 peut être reformulée comme suit :

On note $\mathscr{T}op$ la catégorie des espaces topologiques, $\mathscr{E}ns$ la catégorie des ensembles, et $k_G : \mathscr{T}op \to \mathscr{E}ns$ le foncteur contravariant défini par

$$k_G(X) = \{\text{classes d'isomorphismes de fibrés G-principaux sur X}\}$$

Et pour un morphisme d'espaces topologiques $f : X \to Y$, on définit

$$\begin{aligned} k_G(f) : \quad k_G(Y) &\to k_G(X) \\ E &\mapsto f^*E \end{aligned}$$

Par la Remarque 2.5, k_G est un foncteur contravariant bien défini.
De plus, si on note $h\mathscr{T}op$ la catégorie homotopique de $\mathscr{T}op$, alors par le Corollaire 3.8 et le Corollaire 3.9, k_G induit un foncteur de la catégorie homotopique, encore noté $k_G : h\mathscr{T}op \to \mathscr{E}ns$.

Proposition 3.15 *Si un espace classifiant existe, noté BG, alors le foncteur contravariant $k_G : h\mathscr{T}op \to \mathscr{E}ns$ est représentable par BG. C'est-à-dire, $k_G \cong [-, BG]$ comme foncteurs. Plus explicitement, il y a une bijection naturelle pour tout espace topologique X*

$$k_G(X) \cong [X, BG]$$

où on note $[-,-]$ pour $\mathrm{Hom}_{h\mathscr{T}op}(-,-)$

Preuve. Pour tout espace topologique X, on a un morphisme naturel :

$$\begin{aligned} [X, BG] &\to k_G(X) \\ [f] &\mapsto f^*EG \end{aligned}$$

Il est

- bien défini (Corollaire 3.8 et Corollaire 3.9)
- surjectif (1^{er} point de la Définition 3.13)
- injectif (2^{nd} point de la Définition 3.13)
- naturel (fonctorialité de k_G et $[-, BG]$)

□

La proposition précédente permet de réduire le problème de classification au problème de construction d'un fibré universel $p : EG \to BG$.

Définition 3.16 (Construction de Milnor [Hus] P53)
Soit G un groupe topologique. On note $EG = G * G * G \cdots$ le joint infini (combinaison linéaire convexe formelle), c'est-à-dire

$$EG = \{< x, t >= (t_0.x_0, t_1.x_1, \cdots)|x_i \in G, t_i \in [0,1], t_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand}, \sum_i t_i = 1\}$$

Dans cette notation, on a supposé implicitement que

$$< x, t >=< x', t' >\Longleftrightarrow t_i = t'_i \ \forall i \text{ et } x_i = x'_i \ \forall t_i = t'_i > 0$$

On définit l'action de G à droite sur EG par :

$$< x, t > \cdot y =< x \cdot y, t >$$

i.e. $(t_0.x_0, t_1.x_1, \cdots) \cdot y = (t_0.x_0 \cdot y, t_1.x_1 \cdot y, \cdots)$
et la topologie sur EG est la topologie initiale définie par les morphismes coordonnées :

$$\begin{array}{rcl} t_i : & EG & \to [0,1] \\ & < x, t > & \mapsto t_i \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_i : & t_i^{-1}(0,1] & \to G \\ & < x, t > & \mapsto x_i \end{array}$$

EG munie cette topologie est un G-espace à droite, on note $BG = EG/G$.

Théorème 3.17 (Construction de Milnor de Fibré universel) *La construction dans la définition précédente $p : EG \to BG$ est un fibré G-principal.*
De plus, il est un fibré universel, BG est un espace classifiant.

Preuve. c.f. [Hus] P53-57 □

Remarque historique

D'après la propriété universelle, on sait que le fibré universel est unique à homotope-isomorphisme [4] près. En particulier, le type d'homotopie de BG est determiné par G complètement. Mais il n'est pas facile de trouver une *bonne* construction explicite de BG.
La première construction fonctorielle est définie par J.Milnor [Miln]. Dold and Lashof [Dol] reformulent la construction de Milnor de sorte qu'elle peut être appliquée au cas où G est un monoïde topologique. Milgrame[Milg] donne une autre construction fonctorielle, qui est analysée en détail par Steenrod [Ste2].

Pour résumer les bonnes constructions d'espaces classifiants, on donne la propostion suivante qui rassemble les conditions sur EG et BG, grâce à Milnor, Dold, Lashof, Milgrame et Steenrod.

[4] $p_1 : E_1 \to B_1$ et $p_2 : E_2 \to B_2$ sont dit homotope-isomorphes, si et seulement si il existe $f : B_1 \to B_2$ et $g : B_2 \to B_1$ tels que $f \circ g$ est homotope à Id_{B_2}, $g \circ f$ est homotope à Id_{B_1} et $E_1 \simeq f^*E_2$ comme fibrés sur B_1 (l'autre sens est automatique).

Proposition 3.18 *Pour tout groupe topologique G, il existe un unique fibré universel $p : EG \to BG$ à homotope-isomorphisme près. De plus, on peut le construire tel que :*

1. *E, B sont des foncteurs.*
2. *$E(G \times H) = EG \times EH$.*
3. *EG est un groupe topologique contractile de sorte que G est un sous-groupe, BG est l'espace homogène EG/G.*
4. *Si G est abélien, alors BG est le groupe abélien quotient EG/G.*
5. *Si G est un CW complexe tel que la multiplication $G \times G \to G$ est cellulaire, alors BG est un CW complexe.*

Exemple 3.19 *(c.f. les Exemples 2.15)*
Dans les exemples suivants, on note '=' au sens d'homotope-isomorphisme près :

1. Si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $EG = \mathcal{S}^\infty = \varinjlim \mathcal{S}^n$, G agit sur $\mathcal{S}^\infty$ par l'application antipodale, donc $BG = \mathbb{R}P^\infty = \varinjlim \mathbb{R}P^n$.
2. Si $G = \mathcal{S}^1$, alors $EG = \mathcal{S}^\infty = \varinjlim \mathcal{S}^{2n-1}$, G agit sur $\mathcal{S}^\infty$ par multiplication, donc $BG = \mathbb{C}P^\infty = \varinjlim \mathbb{C}P^n$.
3. Si $G = O(k)$, alors $EG = V_k(\mathbb{R}^\infty) = \varinjlim V_k(\mathbb{R}^n)$, $BG = G_k(\mathbb{R}^\infty) = \varinjlim G_k(\mathbb{R}^n)$.
4. Si $G = SO(k)$, alors $EG = V_k(\mathbb{R}^\infty) = \varinjlim V_k(\mathbb{R}^n)$, $BG = \widetilde{G_k}(\mathbb{R}^\infty) = \varinjlim \widetilde{G_k}(\mathbb{R}^n)$.
5. Si $G = U(k)$, alors $EG = V_k(\mathbb{C}^\infty) = \varinjlim V_k(\mathbb{C}^n)$, $BG = G_k(\mathbb{C}^\infty) = \varinjlim G_k(\mathbb{C}^n)$.

Remarque 3.20

1. Dans les Exemples 3.19, le 1^{er} et $2^{\text{ème}}$ exemples sont construits par la méthode de Milnor, mais les autres sont des modèles de fibrés universels construits avec d'autres méthodes beaucoup plus simples que celles de Milnor.
2. La structure de fibré G-principal est induite par l'Exemple 2.15.
3. On sait que tout fibré vectoriel réel admet une réduction de groupe structural $GL_n(\mathbb{R})$ à $O(n)$, par l'existence de métrique riemannienne. Donc on peut classifier les fibrés vectoriels réels (topologiques) en utilisant le fibré universel $V_k(\mathbb{R}^\infty) \to G_k(\mathbb{R}^\infty)$.
   De plus, si un fibré vectoriel reel est orientable, alors il admet une réduction de groupe structural $GL_n(\mathbb{R})$ au $SO(n)$. Donc, on peut classifier les fibrés orientables en utilisant $V_k(\mathbb{R}^\infty) \to \widetilde{G_k}(\mathbb{R}^\infty)$
   De même, en utilisant $V_k(\mathbb{C}^\infty) \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$, on peut classifier les fibrés vectoriel complexes (pas necessairement holomorphes).

Comme une petite application des théories ci-dessus, on donne un exemple qu'on va utiliser plus loin :

Corollaire 3.21 *Soit G un groupe de Lie connexe, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, alors tout fibré G-principal sur $\mathbb{C}^*$ est trivial comme G-fibré **topologique**.*

Preuve. On note BG l'espace classifiant comme d'habitude.
Par la Proposition 3.15, $k_G(\mathbb{C}^*) = [\mathbb{C}^*, BG]$, et le fait que $\mathbb{C}^*$ est homotopiquement équivalent à $\mathcal{S}^1$, il suffit de montrer que $[\mathcal{S}^1, BG]$(= classes de conjugaison de $\pi_1(BG)$) est trivial.
En effet, les dernier termes de la suite exacte longue associée à $p : EG \to BG$ sont :

$$\pi_1(EG) \to \pi_1(BG) \to \pi_0(G) \to \pi_0(EG) \to \{*\}$$

Comme EG est contractile, i.e. $\pi_1(EG)$ est trivial, $\pi_1(BG)$ est aussi trivial par la connexité de G. Donc $k_G(\mathbb{C}^*)$ est trivial, c'est-à-dire, tout fibré G-principal sur $\mathbb{C}^*$ est trivial. □

4 Fibrés holomorphes sur variétés de Stein

On a besoin du résultat suivant qui permettra de faire le lien avec les groupes de lacets.

Théorème 4.1 *Soit G un groupe de Lie complexe connexe, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, alors tout fibré G-principal holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ est trivial (comme fibré G-pincipal **holomorphe**).*

En général, le problème de classification des fibrés G-principaux holomorphes est très difficile. Mais pour une certaine famille d'espaces de base, il se ramène au problème de classification au sens topologique.

Définition 4.2 (Enveloppe convexe holomorphe) *Soit X une variété complexe connexe, K un compact de X, $\mathscr{O}(X)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur X. L'enveloppe convexe holomorphe de K est définie par :*

$$\widehat{K} = \widehat{K}_{\mathscr{O}(X)} = \{x \in X \,|\, |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \ \forall f \in \mathscr{O}(X)\}$$

Si $K = \widehat{K}$, on dit que K est holomorphiquement compact.

Proposition 4.3 (propriétés élémentaires de l'enveloppe convexe holomorphe)

1. *$\widehat{K}$ est un fermé contenant K.*
2. *Pour toute fonction f holomorphe sur X, $\sup_{x \in K} |f| = \sup_{x \in \widehat{K}} |f|$.*
3. *$\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$.*
4. *Si $K_1 \subset K_2$, alors $\widehat{K}_1 \subset \widehat{K}_2$.*
5. *$\widehat{K}$ contient la réunion de K avec toute les composantes connexes de $X - K$ qui sont relativement compactes dans X. (i.e. $\widehat{K}$ bouche les trous de K)*

Preuve.

1. C'est évident.
2. Ça découle immédiatement de la définition.
3. On a $\widehat{\widehat{K}} \supset \widehat{K}$ par 1, et $\widehat{\widehat{K}} \subset \widehat{K}$ par 2.
4. C'est évident.
5. Soit C une composante connexe de $X - K$ relativement compacte dans X, pour toute fonction f holomorphe sur X, $\sup_{x\in C} f = \sup_{x\in\partial C} f \leq \sup_{x\in K} f$ par le principe du maximum et le fait que $\partial C \subset K$. Donc $C \subset \widehat{K}$.

□

Définition 4.4 (holomorphiquement convexe) *Soit X une variété complexe. On dit que X est* holomorphiquement convexe*, si et seulement si pour tout K compact de X, l'enveloppe convexe holomorphe $\widehat{K}_{\mathscr{O}(X)}$ est aussi compacte.*

Proposition 4.5 *Soit X une variété complexe (à base dénombrable d'ouverts). Alors X est holomorphiquement convexe si et seulement si X admet une* suite exhaustive $\{K_i\}$*, qui sont holomorphiquement compacts , i.e. :*

$$K_i \text{ compact et } \widehat{K}_i = K_i,\ K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1},\ \bigcup_i K_i = X$$

Preuve. Si X est holomorphiquement convexe, comme X est à base dénombrable d'ouverts, il est $\sigma-$compact : $X = \bigcup\limits_i L_i$, où L_i sont des compacts de X.

On pose

$$K_0 = \widehat{L}_0, K_{i+1} = \widehat{K_i' \cup L_i}$$

où K_i' est un voisinage compact de K_i.
Réciproquement, soit K_i est une suite exhaustive de X holomorphiquement compact. Alors, pour tout K compact de X, il existe i, tel que $K \subset K_i$, donc $\widehat{K} \subset \widehat{K}_i = K_i$, donc $\widehat{K}$ est compact. □

Tous les variétés complexes compactes sont évidemment holomorphiquement convexes. Mais on a une autre classe d'exemples importants :

Définition 4.6 (variété de Stein) [5] *Soit X une variété complexe. On dit que X est une variété de Stein, si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

[5]La définition dans le livre de L.Hörmander rajoute une condition : pour tout $z \in X$, il existe $f_1, \cdots, f_n$ holomorphes sur X, qui forment un système de coordonnèes en z. Mais elle n'est pas nécessaire :
J-P.Demailly : *This is indeed an unneeded condition ; once you assume the manifold to be holomorphically convex, the above condition is a consequence of the fact that global holomorphic functions separate points (and even of the weakened condition where you assume that global holomorphic functions separate points locally near every point). L^2 estimates easily imply this, modulo elementary constructions on plurisubharmonic functions, e.g. glueing of psh functions through the max procedure.*

1. X est holomorphiquement convexe.

2. $\mathscr{O}(X)$ sépare points de X localement : i.e. tout point $x \in X$ a un voisinage V, tel que pour tout $y \in V - \{x\}$, il existe une fonction f holomorphe sur X avec $f(x) \neq f(y)$

Définition 4.7 (domaine d'holomorphie) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, on l'appelle un* domaine d'holomorphie*, si et seulement si pour tout ouvert connexe U de $\mathbb{C}^n$ qui rencontre $\partial\Omega$, et tout composante connexe V de $U \cap \Omega$, il existe une fonction f holomorphe sur Ω, telle que $f|_V$ ne peut pas s'étendre en une fonction holomorphe sur U.*

Exemple 4.8

1. Tout ouvert de $\mathbb{C}$ est un domaine d'holomorphie.
   En effet, pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction $\frac{1}{z-z_0}$ est holomorphe sur Ω, mais n'admet pas une extension holomorphe sur un voisinage de z_0.
2. (Contre-exemple) $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ n'est pas un domaine d'holomorphie. En effet, on a :

   Théorème 4.9 *(Extension de Riemann) Soit X une variété complexe, S une sous-variété fermée de codimension ≥ 2, alors toute fonction holomorphe sur $X - S$, admet une extension holomorphe sur X.*

On a les théorèmes fondamentaux suivants pour fournir des exemples de variété de Stein :

Théorème 4.10 *Soit $\Omega \in \mathbb{C}^n$ un ouvert. Alors Ω est une variété de Stein si et seulement si c'est une domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$.*

Preuve. c.f. [Dem] P59 □

Théorème 4.11 *Toute surface de Riemann non compacte est une variété de Stein.*

Preuve. c.f. [For] □

Concernant la classification des fibré principaux sur variétés de Stein, on a le théorème suivant dû à H. Grauert[Gra] [Car] :

Théorème 4.12 (H.Grauert) *Soit X est une variété de Stein, G un groupe de Lie complexe. Alors la classification des fibrés G-principaux holomorphes est la même que celle des fibrés G-principaux topologiques. Plus précisement :*

1. *Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement de X. Soient deux 1-cocycles* holomorphes $\{f_{ij} : U_i \cap U_j \to G\}$, $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \to G\}$. *S'il existe une 0-cochaîne* continue $\{c_i : U_i \to G\}$ *satisfaisant (2) : $f_{ij} = c_i g_{ij} c_j^{-1}$, alors il existe aussi des 0-cochaîne* holomorphes *satisaisant les mêmes conditions.*

2. *Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement de X tel que chaque U_i est de Stein. Soit $\{f_{ij} : U_i \cap U_j \to G\}$ un 1-cocycle* continu *. Alors il existe une 0-cochaîne* continue *$\{c_i : U_i \to G\}$ telle que le 1-cocycle $f_{ij} = c_i g_{ij} c_j^{-1}$ est* holomorphe.

Remarque 4.13 En utilisant le langage cohomologique, le résultat se met sous la forme suivante c.f. la Remarque 2.7 :
Notons $\mathscr{G}^c$ le faisceau de fonctions continues à valeurs dans G, $\mathscr{G}^h$ le faisceau de fonctions holomorphes à valeurs dans G. On a un morphisme de faiseaux canonique $\mathscr{G}^h \to \mathscr{G}^c$, le théorème de H. Grauert dit que

$$H^1(X, \mathscr{G}^h) \xrightarrow{\simeq} H^1(X, \mathscr{G}^c)$$

est un isomorphisme (bijection en fait, car les cohomologies sont des ensembles en général).
Informellement, c'est-à-dire, sur variétés de Stein, la seule obstruction pour un problème cohomologique est l'obstruction topologique. On l'appelle souvent **le principe de Oka**.

Maitenant, on peut obtenir le résultat du début de cette section.

Corollaire 4.14 *Soit G un groupe de Lie complexe connexe, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, alors tout fibré G-principal holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ est trivial.*

PREUVE. $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, donc un domaine d'holomorphie, donc une variété de Stein. (c.f. le Théorème 4.10).
D'après le Théorème de H. Grauert 4.12, on sait que la classification des fibrés G-principaux holomorphes est la même que la classificaion des fibrés G-princiaux topologiques. Mais on a vu dans le Corollaire 3.21 que tout fibré G-principal topologique sur $\mathbb{C}^*$ est trivial, donc tout fibré G-principal holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ est aussi trivial. $\square$

En utilisant le Théorème 4.11 à la place du Théorème 4.10 dans la preuve précédente, on a :

Théorème 4.15 [6] *Soit G un groupe de Lie complexe connexe, X une surface de Riemann compacte de genre g à laquelle ont été enlevés n points. Alors tout fibré G-pricipal holomorphe sur X est trivial.*

PREUVE. De même que pour la preuve du Théorème 4.10, il suffit de montrer que [X, BG] est trivial. Or X est homotopiquement équivalent à un bouquet de $(2g + n - 1)$ cercles. Donc

$$[X, BG] = [\bigvee_i \mathcal{S}^1, BG] = \prod_i [\mathcal{S}^1, BG]$$

Mais, $\pi_1(BG)$ est trivial (c.f. la preuve du Corollaire 3.21), donc $[\mathcal{S}^1, BG]$ l'est, et donc $[X, BG]$ l'est aussi. $\square$

[6] Il reste à verifier si ce théorème est vrai pour une surface de Riemann non compacte générale

Corollaire 4.16 *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g à laquelle ont été enlevés n points. Alors tout fibré vectoriel holomorphe sur X est trivial.*

Preuve. Un fibré vectoriel est associé au fibré principal de groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Or tout fibré $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-principal est trivial par le théorème précédent, donc le fibré associé est trivial aussi. (c.f. le Remarque 2.11) □

On va donner une preuve élémentaire du Corollaire ci-dessus. Pour ce faire, on a besoin de généraliser le théorème de Runge au cas des surfaces de Riemann non compactes :

Définition 4.17 (Domaine de Runge) *Soit X une surface de Riemann, $Y \subset X$. On définit $h(Y)$ la réunion de Y avec toutes les composantes connexes de $X - Y$ qui sont relativement compactes dans X. (c.f. Proposition 4.3)*
On dit qu'un ouvert $Y \subset X$ est un domaine de Runge*, si et seulement si $Y = h(Y)$, i.e. $X - Y$ n'a pas de composante connexe compacte. (Car toute composante connexe de $X - Y$ est fermée)*

Théorème 4.18 *Soit X une surface de Riemann non-compacte. Alors il existe une suite exhaustive de domaines de Runge relativement compacts $\{Y_i\}$:*
- *Y_i est un domaine de Runge relativement compact*
- $\overline{Y_i} \subset Y_{i+1}$
- $\bigcup_i Y_i = X$

Preuve. c.f. [For] P189. □

Remarque 4.19 Pour les compacts d'une surface de Riemann, l'opération h coïncide avec l'enveloppe convexe holomorphe $\widehat{\cdot}$, et donc Y est un domaine de Runge relativement compact si et seulement si $\overline{Y}$ est holomorphiquement compact.

On a la forme suivante du théorème de Runge sur une surface de Riemann non-compacte.

Théorème 4.20 (Runge) *Soit X une surface de Riemann non compacte, $Y \subset X$ un domaine de Runge. Alors toute fonction holomorphe sur Y peut être approchée uniformément sur les compacts de Y par des fonctions holomorphes sur X.*

Preuve. c.f. [For] P200. □

Comme dans le cas d'un domaine de $\mathbb{C}$, pour une surface de Riemann non compacte, les théorèmes de Mittag-Leffler et Weierstrass sont encore vrais grâce au théorème de Runge :

Théorème 4.21 (Mittage-Leffler) *Soit X une surface de Riemann non compacte, pour toute prescription de Mittag-Leffler (partie singulière sans point d'accumulation), il existe une fonction méromorphe satisifaisant la prescription, i.e. $H^1(X, \mathscr{O}) = 0$.*

PREUVE. c.f. [For] P202. $\square$

Remarque 4.22 *En effet, il y a un théorème fondamental plus général dû à H. Cartan :*

Théorème 4.23 *Soit X une variété de Stein, $\mathscr{F}$ un faisceau holomorphe cohérent. Alors $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $i \geq 1$.*

Théorème 4.24 (Weierstrass) *Soit X une surface de Riemann non compacte, pour toute prescription d'un diviseur (l'ordre d'un zéro ou pôle sans point d'accumulation), il existe une fonction méromorphe satisiaisant la prescription, i.e. $H^1(X, \mathscr{O}^*) = 0$*

PREUVE. c.f. [For] P203. $\square$

Le point clé est le théorème suivant pour construire des sections globales :

Théorème 4.25 *Soit X une surface de Riemann, $p : E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe, $Y \subset X$ ouvert relativement compact. Alors pour tout $x \in Y$, il existe une section sur Y qui a un pôle en x et holomorphe sur $Y - \{x\}$. En particulier, $\Gamma(Y, \mathscr{M}(E)) \neq \{0\}$.*

PREUVE. Voir l'appendice. $\square$

Maintenant, on peut montrer le Corollaire 4.16 :

Théorème 4.26 (=Corollaire 4.16) *Soit X une surface de Riemann non-compacte, $p : E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe. Alors il est trivial.*

PREUVE.
On va raisonner par récurrence sur le rang de E.
Étape 1. E est de rang 1 (fibré de droite).
Pour un domaine $Y \subset X$ relativement compact fixé, le Théorème 4.25 fournit une section méromorphe $s' \in \Gamma(Y, \mathscr{M}(E))$.
Or le Théorème de Weierstrass donne une fonction f méromorphe sur Y dont pôles et zéros sont respectivement les zéros et les pôles de s', donc $f.s'$ est une section holomorphe sans zéro sur Y. Comme $\mathrm{rank}(E) = 1$, on a $E|_Y$ est trivial.
Soit $\{Y_i\}$ une suite exhausitve de domains de Runge relativement compacts (c.f. Théorème 4.18). On a vu que $E|_{Y_i}$ est trivial pour tout i. On prend s_0 une section de E sur Y_0 non identiquement nulle, par exemple $s_0(x_0) \neq 0$. Pour parler de convergence uniforme', on prend une métrique Riemannienne

quelconque, et définit $\|\sigma\|_Y = \sup_{x\in Y} |s(x)|$, où $|\cdot|$ désigne la norme induite par la métrique. On note $c = \|s_0\|_{Y_0} > 0$.
Par le Théorème de Runge, on construit une suite de sections comme suit :

$$s_{i+1} \in \Gamma(Y_{i+1}, \mathscr{O}(E)),\ \text{telle que } \|s_{i+1} - s_i\|_{Y_i} < \frac{c}{2^i}$$

Alors, la section limite $s(x) = \lim_i s_i(x) \in \Gamma(X, \mathscr{O}(E))$ est bien définie et holomorphe. Comme précédemment, en utilisant le Théorème de Weierstrass, on a une section holomorphe sur X sans zéro. Donc E est trivial (car $\mathrm{rank}(E) = 1$).

Étape 2. On suppose que tous les fibrés vectoriels holomorphes de rang strictement inférieur à n sont triviaux. On considère le cas $\mathrm{rank}(E) = n$.
On admet d'abord qu'il existe une section s holomorphe globale qui ne s'annule pas sur X. Alors on peut prendre un recouvrement de trivialisations $\mathcal{U} = \{U_i\}$, et $s_i^1, s_i^2, \cdots, s_i^{n-1}, s_i^n = s|_{U_i}$ des sections holomorphes sur U_i qui sont linéairement independentes en tout point $x \in U_i$.
Sur tout les intersections $U_i \cap U_j$, les relations du système sont

$$\begin{pmatrix} s_i \\ s_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{ij} & a_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_j \\ s_j^n \end{pmatrix}$$

qui est un 1-cocycle du faisceau $GL_n(\mathscr{O})$, donc G_{ij} est aussi un 1-cocyle du faisceau $GL_{n-1}(\mathscr{O})$. Par hypothèse, il existe une 0-cochaîne G_i du faisceau $GL_{n-1}(\mathscr{O})$, telle que $G_{ij} = G_i G_j^{-1}$. En remplaçant s_j par $G_j^{-1} s_j$, on peut supposer $G_{ij} = 1$, soit

$$\begin{pmatrix} s_i \\ s_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & a_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_j \\ s_j^n \end{pmatrix}$$

De même, a_{ij} est un 1-cocycle du faisceau $\mathscr{O}^{n-1}$. Donc par le théorème de Mittag-Leffler, il existe une 0-cochaîne b_i du faisceau $\mathscr{O}^{n-1}$, telle que $a_{ij} = b_i - b_j$. En remplaçant s_j par $s_j - b_j s_j^n$, $s^1, s^2, \cdots, s^{n-1}$ sont des sections holomorphes globales, et de plus encore linéairement indépendantes en tout point de X. Donc E admet n sections holomorphes globales qui forment une base en tout point, donc E est trivial.

Remarque : En utilisant la langage des faisceaux, l'Étape 2 peut s'écrire simplement :
Par hypothèse d'existence de section globale holomorphe qui ne s'annule pas sur X, le groupe structural $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être réduit au groupe affine :

$$\mathrm{Aff}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \rtimes \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} G & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; G \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C}), b \in \mathbb{C}^{n-1} \right\}$$

On sait que $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{C})$, (en identifiant $g \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ avec $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{C})$), donc on a un fibré principal (localement trivial)

$$\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Aff}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{n-1}$$

qui induit une suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \to \mathrm{GL}_{n-1}(\mathscr{O}) \to \mathrm{Aff}_n(\mathscr{O}) \to \mathscr{O}^{n-1} \to 0$$

La suite exacte longue associée est :

$$\cdots \to H^1(X, \mathrm{GL}_{n-1}(\mathscr{O})) \to H^1(X, \mathrm{Aff}_n(\mathscr{O})) \to H^1(X, \mathscr{O}^{n-1}) \to \cdots$$

Par hypothèse de récurrence, le terme à gauche est trivial, et par le théorème de Mittag-Leffler, le terme de droite est trivial, donc $H^1(X, \mathrm{Aff}_n \mathscr{O})$ est trivial. Donc tout fibré vectoriel de rang n holomorphe sur X est trivial.

Étape 3. Soit $\{Y_i\}$ une suite exhausitve de domaines de Runge relativement compacts (c.f. Théorème 4.18). Par le Théorème 4.25, $E|_{Y_i}$ admet une section méromorphe. par le Théorème de Weierstrass on a une section holomorphe sur Y_i qui ne s'annule pas. En appliquant Etape 2, on a $E|_{Y_i}$ est trivial pour tout i. De même qu'à l'Étape 1, en utilisant l'approximation de Runge, on a une section holomorphe globale sur X. On a une section holomorphe sans zéro par une autre application de Théorème de Weierstrass. Donc l'affirmation de l'Étape 2 est verifiée. □

5 Généralités de Groupes de lacets

Exemple 5.1 *Soit X un espace topologique compact, G un groupe de Lie de dimension finie. On définit*

$$\mathcal{C}^0(X, G) = \{\textit{applications continues de } X \textit{ dans } G\}$$

muni de la topologie uniforme et de la loi de groupe induite par G : pour tout $f_1, f_2 : X \to G$,

$$\begin{array}{rll} f_1 \cdot f_2 : & X & \to G \\ & x & \mapsto f_1(x) f_2(x) \end{array}$$

$\mathcal{C}^0(X, G)$ est un groupe de Lie de dimension infinie d'algèbre de Lie $\mathcal{C}^0(X, \mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de G.

On s'intéresse maintenant à une nouvelle notion qui sera reliée à la notion de G-fibré par le théorème principal (voir l'introduction).

Définition 5.2 (groupe de lacets [Seg])

1. *Dans l'exemple précédent avec $X = \mathcal{S}^1$, on appelle $\mathcal{C}^0(\mathcal{S}^1, G)$ le* groupe de lacets continu *de G .*
2. *De même, on définit*

$$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^1, G) = \{\textit{applications de classe } \mathcal{C}^\infty \textit{ de } \mathcal{S}^1 \textit{ dans } G\}$$

   muni de la topologie uniforme et la loi de groupe induit par G. On l'appelle le groupe de lacets $\mathcal{C}^\infty$ *de G.*

3. *Soit G un groupe de Lie complexe, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. On définit*

$$\mathcal{C}^\omega(\mathbb{C}^*, G) = \{\textit{applications holomorphes de } \mathbb{C}^* \textit{ dans } G\}$$

muni de la topologie de compact-ouvert et la loi de groupe induit par G. On l'appelle le groupe de lacets holomorphe *de G, noté $G(\mathbb{C}^*)_{hol}$.*

4. *Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{C}$, et $\mathbb{C}^* = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, on définit*

$$\mathcal{C}^{alg}(\mathbb{C}^*, G) = \{\textit{points } \mathbb{C}^*\textit{-rationnels de } G\}$$

muni de la loi de groupe induite par G, noté $G(\mathbb{C}^*)_{alg}$ ou $G[z, z^{-1}]$. On l'appelle le groupe de lacets algébrique *de G.*

Dans ce mémoire, on s'intéresse au groupe de lacets holomorphe $G(\mathbb{C}^*)_{hol}$.

Définition 5.3 (séries de Laurent) *Soit $\mathbb{C}[[z]]$ l'anneau des séries formelles de puissances de $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{C}((z))$ son corps de fractions, i.e. l'ensemble $\{\sum\limits_{n=-N}^{+\infty} a_n.z^n | \forall n, a_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}\}$.*

Ces séries permettent notamment de généraliser un résultat d'analycité des fonctions holomorphes comme suit :

Théorème 5.4 *Pour toute fonction holomorphe f à valeur dans $\mathbb{C}^n$ ou dans un groupe multiplicatif G qui s'inclut dans $\mathbb{C}^n$ (par exemple $GL_n(\mathbb{C})$ ou $SL_n(\mathbb{C})$ définie sur une couronne de centre a, il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z-a)^n$$

avec convergence normale sur les compacts de la couronne.

Preuve du Théorème. On recentre la fonction sur 0. Pour une couronne de petit rayon r et de grand rayon R, on note pour $r \leq \rho \leq R$,

$$\begin{array}{rcl} f_\rho : & \mathbb{R} & \to \mathbb{C}^n \\ & t & \mapsto f(\rho e^{it}) \end{array}$$

qui est 2π-périodique, donc par théorème de convergence de Dirichlet, est égale à sa série de Fourier ponctuellement. Comme f est $\mathcal{C}^2$, la convergence est normale sur les compacts de la couronne.

$$f(\rho e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f_\rho) e^{int}$$

On note $c_n(f_\rho) = c_n(f, \rho)$ et on peut montrer facilement que $\dfrac{dc_n}{d\rho}(f,\rho) = \dfrac{n}{\rho} c_n(f,\rho)$ et donc $a_n(f) = \dfrac{c_n(f,\rho)}{\rho^n}$ est indépendant de ρ, alors $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(f) z^n$.

□

Remarque 5.5 *Les fonctions $f_{|\rho S^1}$ sont des lacets holomorphes, d'où le nom donné parfois aux ensemble de séries de ce type de groupe de lacets.*

Définition 5.6 *On définit le groupe de lacets*

$$G((z)) = \{\textit{points } \mathbb{C}((z))\textit{-rationnels de } G\}$$

On l'appelle le groupe de lacets formel *de G.*

On peut naturellement définir une action de $H = G((z))$ ou$G(\mathbb{C}^*)_{hol}$ sur lui-même :

Définition 5.7 *On appelle* conjugaison tordue de paramètre *q l'action*

$$\rho_{g(z)} : a(z) \mapsto g(z) \bullet a(z) = g(q.z).a(z).g(z)^{-1}$$

avec $g(z) \in H$et $q \in \mathbb{C}^*$. Si $q = 1$, c'est une conjugaison classique.
On dit qu'une classe de conjugaison tordue (pour $G((z))$) est intégrale *si elle contient un élément de $G[[z]]$.*

Le but est de classifier les orbites des conjugaisons tordues de H, et un résultat très puissant obtenu par Vladimir Baranovsky et Victor Ginzburg pour $|q| < 1$ est le suivant :

Théorème 5.8 *On note $\mathcal{E} = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ la courbe elliptique. Si G est un groupe algébrique semi-simple, alors il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des classes de conjugaisons tordues intégrales dans $G((z))$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes de G-fibrés holomorphes principaux semi-stables sur $\mathcal{E}$.*

Dans ce mémoire, on s'intéresse au résultat moins fort, le Théorème Principal de l'introduction (Théorème 1.1).

Remarques 5.9 *Ce théorème fait un lien entre classes de conjugaisons tordues et G-fibrés, il est important car les conjugaisons tordues peuvent être vues comme des conjugaisons classiques dans un groupe plus large : $\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}((z))$ par automorphismes de corps en effectuant une "homothétie" sur la variable z : $a(z) \mapsto a(t.z)$. Dans le produit semi-direct associé $G((z)) \rtimes \mathbb{C}^*$, la conjugaison est la suivante :*

$$\forall g, a \in G, \forall q \in \mathbb{C}^*, (g(z), 1)).(a(z), q).(g(z), 1)^{-1} = (g(z) \bullet a(z), q)$$

Les classes de conjugaison tordues correspondent à de simples classes de conjugaison de $G((z)) \rtimes \mathbb{C}^*$, dont une extension centrale est un groupe classique (groupe de Kac-Moody).

6 Théorème Principal

Définition 6.1 *Soit Γ un groupe discret, X une variété munie d'une action de Γ (à gauche).*

1. *On dit que l'action de Γ sur X est* libre *si et seulement si pour tout $\sigma \in \Gamma, \sigma \neq 1$, l'action de σ n'a pas de point fixe.*
2. *On dit que l'action de Γ sur X est* proprement discontinue*, si et seulement si pour tout $K \subset X$ compact, le cardinal de $\{\sigma | \sigma K \cap K \neq \varnothing\}$ est fini.*

Il y a une proposition bien connue :

Proposition 6.2 *Soit Γ est un groupe discret, X une variété $\mathcal{C}^\infty$/ complexe, muni d'une action de Γ (à gauche) $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe (resp. biholomorphe). Si l'action de Γ sur X est libre et proprement discontinue, alors $\pi : X \to \Gamma \backslash X$ est un revêtement de variétés $\mathcal{C}^\infty$ (resp. complexe).*

Preuve. c.f. [Pau] $\square$

Exemple 6.3 Soit $q \in \mathbb{C}^*$ avec $|q| < 1$, le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{C}^*$ par $n \cdot z = q^n z$ (comme $\mathbb{Z}$ est abélien, l'action à gauche et à droite sont les mêmes). Il est facile de vérifier que cette action est libre et proprement discontinue. Donc on a un revêtement de surface de Riemann $\pi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}} = \mathcal{E}$. On peut aussi voir $\mathcal{E}$ comme le groupe quotient de $\mathbb{C}^*$ par le sous-groupe fermé $q^{\mathbb{Z}}$.
Comme $\mathcal{E}$ est homéomorphe à un tore, i.e. une surface de Riemann de genre 1, on l'appelle courbe elliptique.
En effet, il y a un isomorphisme de groupe de Lie complexe compact abélien :

$$\begin{aligned} exp: \quad \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} &\xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^* \\ z + 2\pi i\mathbb{Z} &\mapsto e^z \end{aligned}$$

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $q = e^a$,(donc $a \notin i\mathbb{R}$) alors par l'isomorphisme ci-dessus, on a :

$$\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{C}/(2\pi i\mathbb{Z} + a\mathbb{Z})$$

Or a et $2\pi i$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Le terme à droite ci-dessus est sous la forme de courbe elliptique standarde.

Remarque 6.4 *Une courbe elliptique est habituellement définie comme ensemble des zéros d'une équation polynômiale de la forme $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ sur $\mathbb{C}$. On peut passer de la forme $\mathbb{C}/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z})$ à la forme équationnelle de la façon suivante : on pose $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ et on définit la fonction*

$$\wp : z \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \backslash \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Elle est convergente (en dehors de Λ) car $\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$ *est de degré 3 en* $\frac{1}{\omega}$ *et Λ est un simple réseau de dimension 2. $\wp$ est clairement périodique en ω_1 et ω_2, on dit que c'est une fonction elliptique. La somme converge normalement sur un compact inclus dans une cellule, donc sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\Lambda$, et on peut dériver, on a alors*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

avec $g_2 = 60 \sum_{\omega\in\Lambda\backslash\{0\}} \frac{1}{\omega^4}$ *et* $g_3 = 140 \sum_{\omega\in\Lambda\backslash\{0\}} \frac{1}{\omega^6}$. *En posant $\wp(z) = x$ et $\wp'(z) = y$, on fait apparaître le paramétrage normale de la courbe elliptique. Il existe une réciproque qui fait passer d'une forme équationnelle à un tore.*

Définition 6.5 (fibré équivariant)
(Objets) *Un fibré $p : E \to X$ est dit* Γ-équivariant, *si et seulement si*

- *E et X sont des variétés munies de l'action de Γ à gauche, (bien sûr, si le fibré est holomorphe, on demande à l'action de Γ d'être holomorphe)*
- *p est un Γ-morphisme, i.e. il commute avec l'action de Γ, autrement dit, l'action de Γ preserve les fibres.*
- *l'action de Γ sur X est libre et proprement discontinue (donc l'action sur E l'est aussi).*
- *$\forall\sigma \in \Gamma$, $\sigma : E \to E$ est un morphisme de fibré (donc automorphisme).*

(Morphismes) *Un morphisme entre deux fibrés*

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

est dit Γ-équivariant, *si et seulement si f l'est. De même que fibré général, un morphisme Γ-équivariant est automatiquement un isomorphisme Γ-équivariant*

Théorème 6.6 ([Ati]) *Soit Γ un groupe discret qui agit sur une variété X librement et proprement discontinue. On note $B = \Gamma\backslash X$, alors il y a une équivalence entre la catégorie de fibré G-principal sur B et la catégorie de fibré G-principal Γ-équivariant sur X. C'est-à-dire, on a une bijection naturelle entre $k_G(B)$ et $k_G^\Gamma(X)$, où $k_G(B) = \{$classes d'isomorphisme de fibré G-principal sur $B\}$, et $k_G^\Gamma(X) = \{$classes d'isomorphisme de fibré G-principal Γ-équivariant sur $X\}$.*

Preuve.

1. Pour tout fibré Γ-équivariant $p : E \to X$, comme l'action sur E est aussi libre et proprement discontinue, on a une variété $\Gamma\backslash E$. Par la Γ-équivariance de p, il passe au quotient $\bar{p} : \Gamma\backslash E \to \Gamma\backslash X = B$. Par la trivialité locale de E, $\bar{p} : \Gamma\backslash E \to B$ est aussi localement trivial. De plus, si E est G-principal, $\Gamma\backslash E$ l'est aussi. i.e. on a une application

$$\begin{aligned} q : \quad k_G^\Gamma(X) &\to k_G(B) \\ E &\mapsto \Gamma\backslash E \end{aligned}$$

2. Pour l'autre sens, on note $\pi : X \to B$ le revêtement. Pour tout fibré $p : E \to B$, le fibré induit π^*E est un fibré sur X. On a une action de Γ sur π^*E définie par $\sigma(x,y) = (\sigma x, y)$ pour tout $\sigma \in \Gamma$, $(x,y) \in X \times E$ satisifaisant $\pi(x) = p(y)$. L'action est bien définie car $\pi(\sigma x) = \pi(x) = p(y)$, est bien Γ-équivariant, donc π^*E est un fibré Γ-équivariant sur X. De plus, si E est G-principal, π^*E l'est aussi, i.e. on a une application
$$\begin{array}{rll} \pi^* : & k_G(B) & \to k_G^\Gamma(X) \\ & E & \mapsto \pi^*E \end{array}$$
3. Il est facile de verifier que q et π^* sont inverses l'un de l'autre.

$\square$

Remarques 6.7

1. Quoiqu'on restreigne aux fibrés principaux équivariants, le même résultat est vrai pour les fibrés équivariants de type de fibre quelconque. Comme le type de fibre ne joue aucun rôle pour classifier les fibrés, il suffit donc de considèrer les fibrés principaux.
2. Le théorème est encore vrai en remplaçant *fibré* par *fibré holomorphe*.

Enfin, on est prêt pour la démonstration du théorème principal dû à Looijenga [Gin] :

Théorème 6.8 *Soit $q \in \mathbb{C}^*$ avec $|q| < 1$, notons $\mathcal{E} = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ la courbe elliptique*[7]*. Soit G un groupe de Lie complexe connexe. Alors il y a une bijection entre $k_G(\mathcal{E})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibré G-principal holomorphe sur $\mathcal{E}$, et l'ensemble des classes de conjugaison tordues de paramètre q dans $G(\mathbb{C}^*)_{hol}$*

Preuve. $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{C}^*$ par $n \cdot z = q^n z$ librement proprement discontinue, et induit un revêtement de surface de Riemann $\pi : \mathbb{C}^* \to \mathcal{E}$. Par le Théorème 6.6, on a $k_G(\mathcal{E}) \simeq k_G^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*)$.
Or tout fibré G-principal holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ est trivial par le Corollaire 4.14, donc tout élément de $k_G^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*)$ est determiné par l'action $\mathbb{Z}$ sur le fibré trivial $p : \mathbb{C}^* \times G \to \mathbb{C}^*$. On note encore q pour le générateur de $\mathbb{Z}$, donc l'action s'écrit sous la forme :
$$q \cdot (z,g) = (qz, \phi(z)g), \qquad z \in \mathbb{C}^*, g \in G \tag{5}$$
où $\phi : \mathbb{C}^* \to G$ est holomorphe, i.e. $\phi \in G(\mathbb{C}^*)_{hol}$. On dit que le fibré $\mathbb{Z}$-équivariant défini par (5) est associé au *multiplicateur* ϕ.
D'autre part, soient $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{C}^* \to G$ deux multiplicateurs, les fibrés principaux

[7] c.f. Exemple 6.3

$\mathbb{Z}$-équivariants associés sont isomorphes si et seulement si il y a un morphisme $\mathbb{Z}$-équivariant entre eux :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^* \times G \arrow[rr, "\widetilde{\psi}"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{C}^* \times G \arrow[dl, "p"] \\
& \mathbb{C}^* &
\end{tikzcd}$$

i.e. il existe $\psi : \mathbb{C}^* \to G$ holomorphe, tel que :

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} : \quad \mathbb{C}^* \times G &\to \mathbb{C}^* \times G \\ (z, g) &\mapsto (z, \psi(z)g) \end{aligned}$$

satisfaisant la condition d'équivariance : $q \circ \widetilde{\psi} = \widetilde{\psi} \circ q$, i.e.

$$(qz, \phi_1(z)\psi(z)g) = (qz, \psi(qz)\phi_2(z)g), \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*, g \in G$$

C'est-à-dire : pour tout $z \in \mathbb{C}^*$

$$\phi_1(z) = \psi(qz)\phi_2(z)\psi(z)^{-1} \tag{6}$$

D'où, les fibrés G-principaux $\mathbb{Z}$-équivariants associés aux multiplicateurs ϕ_1 et ϕ_2 sont isomorphes, si et seulement si ils sont conjugués de manière tordue. Pour résumé, on a obtenu une application

$$\{\text{classes de conjugaison tordues de } G(\mathbb{C}^*)_{hol}\} \to k_G^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*)$$

qui est bien défini et injective par (6), et surjective par (5), donc bijective. En utilisant le fait que $k_G(\mathcal{E}) \simeq k_G^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*)$, on achève la démonstration. □

Références

[Ati] M. F. Atiyah, *K-theory*, W.A.Benjamin,Inc.

[Car] H. Cartan *Espace Fibrés Analytiques*, Symposium Internacional De Topologia Algebraica, 1958,97-121.

[Dem] J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Algebraic Geometry*, sur le site.

[Dol] A. Dold and R. Lashof, *Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalence of bundles*, Illinois J.Math.3,1959, 285-305.

[For] O. Forster,*Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate texts in mathematics 81.

[Gin] V. Baranovsky and V. Ginzburg, *Conjugacy Classes in Loop Groups and G-Bundles on Elliptic Curves*, International Mathematics Research Notices, 1966, No.15.

[Gra] H. Grauert *Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume*, math.Annulen.129,1955, 233-259.

[Hatch] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press,2002.

[Hus] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, McGraw-Hill series oin Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Company, 1966.

[Milg] R. J. Milgram, *The bar construction and Abelian H-spaces*, Illiois J.Math.11,1967,242-250.

[Miln] J. Milnor, *Construction of universal bundles I,II*, Ann.Math.63,1956.

[Miln2] J. Milnor, *Remarks on Infinite-dimensional Lie Groups*, Relativité,Groupes et TopologieII part3, 1983,1010-1057.

[Pau] F. Paulin,*Geométrie Différentielle*, poly de cours.

[Ric] I. Richards, *On the Classification of Noncompact surfaces*, Trans. Amer.Math.Soci,106,1963,259-269.

[Seg] A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 1986.

[Ste] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princton Mathematical Series, Princton University Press, 1951.

[Ste2] N. Steenrod, *Milgram's classifying space of a topological group*, Topology 7, 1968, 349-368.